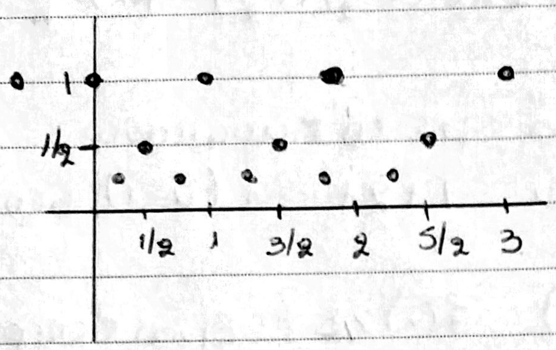
21/11/2016

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \\ \frac{1}{n} & , x = \frac{m}{n} \quad n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z} \text{ ΜΚΔ}(m,n)=1 \end{cases}$



Η $f$ είναι συνεχής σε κάθε άρρητο και ασυνεχής σε κάθε ρητό

1) Έστω $q \in \mathbb{Q}$ Τότε $f(q) > 0$

Επιλέγουμε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία αρρήτων με $x_n \to q$

$f(x_n) \underset{x_n \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}}{=} 0 \to 0 \neq f(q)$

Άρα η $f$ δεν είναι συνεχής στο $q$

2) Έστω $r \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ και θα δείξουμε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $r$ (τότε $f(r)=0$)

Έστω $\varepsilon > 0$

Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < \varepsilon$

Στο διάστημα $(r-\frac{1}{2}, r+\frac{1}{2})$ υπάρχει το πολύ ένας ακέραιος δηλ. το πολύ ένα σημείο $x$ για το οποίο $f(x) < 1$

Στο διάστημα $(r-\frac{1}{2}, r+\frac{1}{2})$ υπάρχουν το πολύ δύο αριθμοί για τους οποίους $f(x)=\frac{1}{2}$

Για κάθε $k=1,\dots,n-1$ υπάρχουν το πολύ $k$ αριθμοί $x$ στο διάστημα $(r-\frac{1}{2}, r+\frac{1}{2})$ για τους οποίους $f(x)=\frac{1}{k}$

$\{x\in(r-\frac{1}{2}, r+\frac{1}{2}) \ f(x)>\varepsilon\} \subseteq \{x\in(r-\frac{1}{2}, r+\frac{1}{2}) \ f(x)=\frac{1}{k} \ k=1,\dots n-1\}$

Το τελευταίο σύνολο σύμφωνα με το παραπάνω επιχείρημα περιέχει το πολύ $1+2+\dots+(n-1)$ στοιχεία

Άρα το σύνολο $\{x\in(r-\frac{1}{2}, r+\frac{1}{2}) \ f(x)\geq\varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο

Έστω $\{x_1,\dots x_d\}$ το σύνολο αυτό
Θέτουμε $\delta=\min\{\frac{1}{2}, \min\{|x_i-r| \ i=1,\dots d\}\}>0$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $|x-r|<\delta$ $f(x)<\varepsilon$
Επομένως η $f$ είναι συνεχής στο $r$
άρα $|f(x)-f(r)|<\varepsilon$

Παρατήρηση

Για να εξετάσουμε της $f$ στο $x_0$ αρκεί να εξετάσω τις τιμές της $f$ "κοντά" στο $x_0$

Αν $f:A\to\mathbb{R}$, $x_0\in A$ και υπάρχει $\delta_1>0$ ώστε ο περιορισμός της $f$ στο $A\cap(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$ να είναι συνεχής στο $x_0$, τότε η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$

Αποδ.

Εστω $\varepsilon>0$ τοτε $\exists \delta_2>0$ ώστε $\forall x\in A\cap(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$ με $|x-x_0|<\delta_2$ να ισχύει $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

Θέτοντας $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$

Εχουμε...

Κάθε συνάρτηση συνεχής σε ένα σημείο $x_0$ είναι τοπικά φραγμένη σε αυτό

Προταση

$f:A\to\mathbb{R}$, $x_0\in A$ $f$ συνεχής στο $x_0$ Τότε $\exists\delta>0$ και $\exists M>0$ $\forall x\in A\cap(x_0-\delta, x_0+\delta)$ $|f(x)|<M$.

Αποδ

Εφαρμόζοντας τον ορισμό της συνεχειας στο $x_0$ για $\varepsilon=1$ προκυπτει οτι $\exists\delta>0$ ώστε $\forall x\in A$ με $|x-x_0|<\delta$ να ισχύει $|f(x)-f(x_0)|<1$

Θέτοντας $M=1+|f(x_0)|$ Εχουμε $\forall x\in A\cap(x_0-\delta, x+\delta)$

$$|f(x)|\leq|f(x)-f(x_0)|+|f(x_0)|<1+f(x_0)=M.$$

Θεώρημα

Εστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση

Τότε η $f$ είναι φραγμένη

Απόδειξη

Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει Τότε για κάθε $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει $x_n\in[a,b]$ με $|f(x_n)|>n$

Η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ακολουθία, άρα απο το

Θεώρημα Bolzano - Weierstass έχει συγκλίνουσα υπακολουθία
δηλ υπάρχει $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $\xi\in\mathbb{R}$
ώστε $x_{k_n} \to \xi$
Εφόσον $a \leq x_{k_n} \leq b$
και $x_{k_n} \to \xi$ θα ισχύει $a \leq \xi \leq b$
δηλ $\xi \in [a,b]$

Εφόσον η $f$ είναι συνεχής στο $\xi$ και ισχύει $x_{k_n} \to \xi$
Προκύπτει ότι $f(x_{k_n}) \to f(\xi)$

Άρα η $(f(x_{k_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη

Όμως $\forall n\in\mathbb{N}$ $|f(x_{k_n})| > k_n \geq n$ άτοπο
Επομένως η $f$ είναι φραγμένη

<u>Παρατήρηση</u>
Η υπόθεση ότι το πεδίο ορισμού της $f$ είναι κλειστό διάστημα $[a,b]$ στο προηγούμενο Θεώρημα δε μπορεί να παραλειφθεί

Π.χ. $f: (0,1) \to \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$ είναι συνεχής αλλά όχι φραγμένη

<u>Θεώρημα</u>
Έστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η $f$ λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή (δηλ. $\exists\, x_0, y_0 \in [a,b]$ ώστε $f(x_0) \leq f(x) \leq f(y_0)$ $\forall x \in [a,b]$ )

<u>Αποδ.</u>
Δείχνουμε ότι η $f$ παίρνει μέγιστη τιμή

$\boxed{α'}$ $\boxed{\text{απόδειξη}}$ Το σύνολο $A = \{ f(x) \quad x \in [a, b] \}$ (που προφανώς είναι μη κενό) είναι άνω φραγμένο άρα απο το αξίωμα πληρότητας έχει supremum. Θέτουμε $M = \sup A$. Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι η $f$ δεν λαμβάνει μέγιστη τιμή. Τότε $f(x) < M$ $\forall x \in [a, b]$

Ορίζουμε $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$. Η $g$ είναι συνεχής (ως πηλίκο συνεχών) (και $g(x) > 0$ $\forall x \in [a, b]$)

Απο το προηγούμενο θεώρημα η $g$ είναι φραγμένη. Άρα $\exists \theta > 0$ ώστε $g(x) < \theta$ $\forall x \in [a, b]$

$$\frac{1}{M - f(x)} < \theta \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow \frac{1}{\theta} < M - f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\Rightarrow f(x) < M - \frac{1}{\theta} \quad \forall x \in [a, b]$$

Άτοπο διότι $M = \sup A$ και εδώ δείξαμε ότι $y < M - \frac{1}{\theta}$ $\forall y \in A$

Επομένως η $f$ λαμβάνει μέγιστη τιμή

$\boxed{β'\ \text{απόδειξη}}$ (με χρήση ακολουθιών)
Θέτουμε $M = \sup \{ f(x) \quad x \in [a, b] \}$
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε $x_n \in [a, b]$ με $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$
Η $(x_n)$ είναι φραγμένη ακολουθία άρα απο Θ. B-W έχει συγκλίνουσα υπακ. Έστω $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$
$\exists \xi \in \mathbb{R}$ $x_{k_n} \to \xi$ Τότε $\xi \in [a, b]$

Εφόσον η $f$ είναι συνεχής στο $\xi$ προκύπτει ότι
$f(x_{k_n}) \to f(\xi)$
Έχουμε

$$M - \frac{1}{n} \le M - \frac{1}{k_n} < f(x_{k_n}) \le M$$
$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$
$$M \qquad\qquad\qquad\qquad M$$

Άρα $f(x_{k_n}) \to M$
Συνεπώς $f(\xi) = M$
Άρα η $f$ λαμβάνει μέγιστη τιμή στο σημείο $\xi$.

Δείχνουμε τώρα ότι η $f$ λαμβάνει ελάχιστη τιμή $f:[a,b] \to \mathbb{R}$
$\Rightarrow -f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής

Σύμφωνα με τα προηγούμενα η $-f$ λαμβάνει μέγιστη τιμή
άρα η $f$ λαμβάνει ελάχιστη τιμή

__Λήμμα__
Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ $x_0 \in A$ $f$ συνεχής στο $x_0$

(i) Αν $f(x_0) > 0$ Τότε $\exists\, \delta > 0$ ώστε $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$ $(>0)$
$\forall\, x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

(ii) Αν $f(x_0) < 0$ Τότε $\exists\, \delta > 0$ ώστε $f(x) < \frac{f(x_0)}{2}$ $(<0)$
$\forall\, x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

__Αποδ__
Εφαρμόζοντας τον ορισμό για $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$
προκύπτει ότι $\exists\, \delta > 0$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{f(x)}{2}$

$$-\frac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2}$$

$$\frac{f(x_0)}{2} < f(x)$$

(ii) Εφαρμόζοντας τον ορισμό για $\varepsilon = -\frac{f(x_0)}{2}$ προκύπτει ότι $\exists\, \delta > 0$ ώστε $\forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ισχύει

$$|f(x) - f(x_0)| < -\frac{f(x_0)}{2}$$

$$\frac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) < -\frac{f(x_0)}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) < \frac{f(x_0)}{2}$$

<u>Θεώρημα</u> (Bolzano).

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής ώστε $f(a) < 0 < f(b)$

(ή $f(b) < 0 < f(a)$)

Τότε $\exists\, \xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = 0$